SOLUCIONARIO EXAMEN PARCIAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS PA 2023_2

PARTE I

Responda a las siguientes preguntas:

2. a) **(0.5P)** Evalué el polinomio: $P_n(x) = x^3 - 5x^2 + 6x + 0.55$

En $x = 3.5$. Utilice **aritmética de 3 dígitos significativos con redondeo**. Evalué el error relativo porcentual.

$3.5^3 - 5 * 3.5^2 + 6 * 3.5 + 0.55 = 3.175$

$42.9 - 61.5 + 21 + 0.55 = 2.95$

$\%\delta p = \frac{3.175-2.95}{3.175} * 100 \approx 7\%$

b) **(0.5P)** Repita el inciso a) pero exprese el polinomio como:
$P_n(x) = ((x-5)x+6)x + 0.55$ ¿Cuál es la fórmula que usaría? Justifique usando el error relativo porcentual.

$(3.5-5) = -1.5 \quad -1.5 * 3.5 = -5.25 \quad -5.25 + 6 = 0.75$

$0.75 * 3.5 = 2.63 \quad 2.63 + 0.55 = 3.18$

$\%\delta p = \frac{3.175-3.18}{3.175} * 100 \approx 0.16\%$

Se usaría el caso b) por tener menos error.

2. **(1P)** Sea el sistema de punto flotante basado en el estándar IEEE-754, con la siguiente estructura:

S	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	M_1	M_2	M_3	M_4

Determine el mayor y menor número no normalizado negativo.

Solución

K=5

Bias=$2^{K-1}-1=15$

ExpSN=-(Bias-1)=-14

MenorSN: $(-1)^{(1)}(0.1111)*2^{-14} = -(2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}+2^{-4})*2^{-14} = -5.7220*10^{-5}$

MayorSN: $(-1)^{(1)}(0.0001)*2^{-14} = -2^{-18} = -3.8147*10^{-6}$

3. **(1P))** Verifique si converge para el método de Gauss-Seidel el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & 3 \\ 7 & 0 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$, Fundamente su respuesta.

Solución

Se verifica que:

4>(2+1)

5>(1+3)

8>(7+0)

Por lo tanto es estrictamente diagonal dominante, por lo tanto converge para cualquier método.

4. **(1P)** Sea la factorización de Crout:

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & 0 \\ 5 & 17 & 8 \\ 0 & 4 & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ 0 & b & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & e & d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine ***a*+*b*+*c*+*d*+*e***

Solución

$$\boldsymbol{a = 5, b = 4;\ c = 3, d = 4, e = 1}$$

a+b+c+d+e=17

5. **(1P)** Dado un problema de rigidez, que se modela por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dy_1}{dt} = -500.5y_1 + 499.5y_2 \quad y_1(0) = 2$$
$$\frac{dy_2}{dt} = +499.5y_1 - 500.5y_2 \quad y_2(0) = 1$$
$$\Rightarrow \frac{dY}{dt} = -\begin{bmatrix} 500.5 & -499.5 \\ -499.5 & 500.5 \end{bmatrix} Y = -AY$$

Sea la frecuencia del movimiento definida por: $\omega_i^2 = \lambda_i(A)$. Usando el método analítico de valores propios, determine la máxima frecuencia ω_{max} (rad/s) del movimiento.

Solución

$$|A - \lambda I| = 0$$

Para este caso:

$$\begin{vmatrix} 500.5 - \lambda & -499.5 \\ -499.5 & 500.5 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad (500.5 - \lambda)^2 - 499.$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado, se obtiene las siguientes raices:

$$\lambda_1 = 1 \quad , \lambda_2 = 1000$$

$$\omega_{max} = \sqrt{1000} = 31.63 \quad rad/s$$

6. **(1P)** Dada la siguiente matriz de un sistema dinámico:

$$A = \begin{bmatrix} 31 & 41 & -22 \\ 41 & 13 & 5 \\ -37 & -40 & 46 \end{bmatrix}$$

Halle el mayor autovalor absoluto, utilizando algún método numérico enseñado en clase, utilice como vector propio de partida $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y realice 2 iteraciones.

Solución

Iteración número 1 A*u=50 59 -31
Lam=59 u=0.8475 1 -0.5254

Iteración número 2 A*u= 78.8305 45.1186 -95.5254
Lam=-95.5254 u= -0.8252 -0.4723 1

7. **(1P)** Completar la siguiente función en MATLAB que permite analizar la convergencia del método iterativo de Jacobi, por el criterio de la diagonal estrictamente dominante:

```
function flag=convergencia(A)

% flag=1   Si hay convergencia de Jacobi

% flag=0   Si no hay convergencia de Jacobi

D= abs(diag(A)); % obtiene la diagonal en valor absoluto
s=sum(abs(A'))'-D;

% Obtiene la suma por filas sin la diagonal

flag= 1 ;  % inicializa variable Booleana

for i=1:size(A,1)

     if D(i)<=s(i)  % condicion logica

          flag=__0___;  % actualiza variable Booleana

     end

end
```

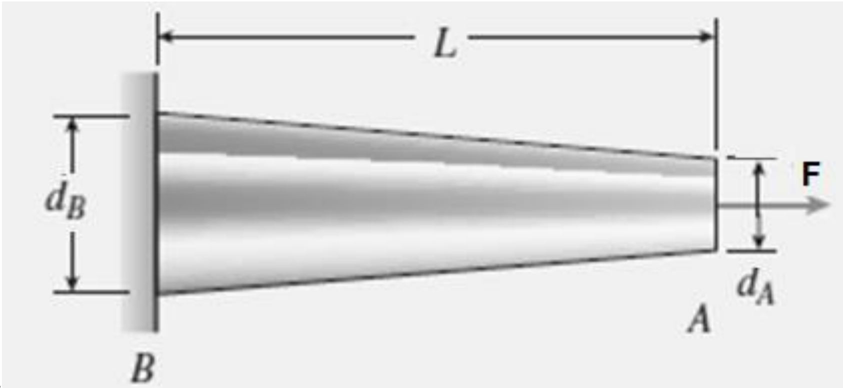
8. **(1P)** Complete el código que analiza la convergencia de la bisección.

```
f= @(x)sin(x^2)/6+cos(2*x)/20;
a=3; b=5;
if f(a)*f(b)<0
    fprintf('El método converge por lo menos en una raíz\n')
else
    fprintf('El método no garantiza da\n')_
end
```

PARTE II

Problema 1

Una pieza de metal de forma de cono truncado está empotrada en el extremo B. Siendo los diámetros d_A=0.2 m, d_B= 0.5 m, la longitud L=2.4 m, el módulo de elasticidad E =10^9 Pascales y sometida a una carga axial F=4000 Newtons. Considere como exacto π=3.1416.



.

Su deformación longitudinal se puede calcular con la siguiente formula:

$$\boldsymbol{\delta = \frac{4FL}{\pi E d_A d_B}}$$

Si la deformación longitudinal (**δ**) debe tener un error no mayor de 5%, se pide:

a) **(1 P)** Estime el valor de la deformación longitudinal y su rango de variación.
b) **(2 P)** El error absoluto y relativo permisible para cada variable.
c) **(1 P)** Determine la cantidad de cifras significativas exactas que debe tener el módulo de elasticidad **E**.

<u>Sugerencia</u>: aplique el principio de igual efecto.

Solución

a)

$$\delta = \frac{4\,F\,L}{\mathrm{E\,dA\,dB}\,p}$$

δ = 1.2223e-04

ξ δ* = 0.05* δ = 6.1115e-06

rango_**δ = [0.0001161 0.0001283]**

b)
p=3.1414

$$d\delta/dF = \frac{4\,F\,L}{\mathrm{E\,dA\,dB}\,p}$$

d **δ/ d F** = 3.0558e-08

d δ/ d L = $\dfrac{4\,F\,L}{\mathrm{E\,dA\,dB}\,p}$

d δ/ d L = 5.0929e-05

d δ/ d E = $\dfrac{4\,F\,L}{\mathrm{E\,dA\,dB}\,p}$

d δ/ d E = -1.2223e-13

d δ/ d dA = $\dfrac{4\,F\,L}{\mathrm{E\,dA\,dB}\,p}$

d δ/ d dA = -6.1115e-04

d δ/ d dB = $\dfrac{4\,F\,L}{\mathrm{E\,dA\,dB}\,p}$

d δ/ d dB = -2.4446e-04

ξ F *= ξ δ */(5 * d δ/ d F) = 40

δF * = 0.01

ξ E *= ξ δ */(5 * d δ/ d E) = 10000000

δE * = 0.01

ξ L *= ξ δ */(5 * d δ/ d L) = 0.0240

δL * = 0.01

ξ dA *= ξ δ */(5 * d δ/ d dA) = 0.002

δdA * = 0.01

ξ dB *= ξ δ */(5 * d δ/ d dB) = 0.005

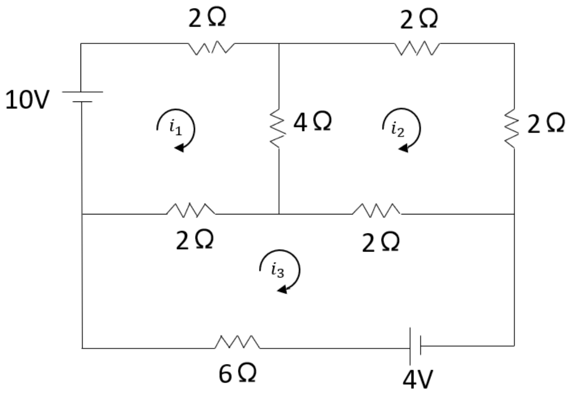
δL * = 0.01

c)

δE * = 0.01 < $5*10^{-t}$
t=2 c.s.e.

Problema 2

Dado el circuito eléctrico:



a) **(1.0P)** Modele el sistema lineal: $R \times I = V$
b) **(1.0P)** ¿Es la matriz R definida positiva y simétrica? Justifique
c) **(1.0P)** Realice la factorización de Cholesky: $R = L*L^T$
d) **(1.0P)** forme dos sistemas triangulares y aplique sustitución directa e inversa para obtener la solución del sistema, es decir el vector de intensidades (I) en Amperios.

Solución

a)

Sumatoria de Voltajes en las mallas

Malla 1: $10 - (2 + 2 + 4)i_1 + 4i_2 + 2i_3 = 0$

Malla 2: $4i_1 - (4 + 2 + 2 + 2)i_2 + 2i_3 = 0$

Malla 3: $4 + 2i_1 + 2i_2 - (6 + 2 + 2)i_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} 8 & -4 & -2 \\ -4 & 10 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

b) La Matriz A es simétrica y definida positiva debido a que los determinantes de los menores principales son positivos, de acuerdo al teorema de Silvester.

$$det[8] > 0 \qquad det\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 10 \end{bmatrix} > 0 \qquad det\begin{bmatrix} 8 & -4 & -2 \\ -4 & 10 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{bmatrix} > 0$$

c) $$\begin{bmatrix} 8 & -4 & -2 \\ -4 & 10 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{8} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} & \sqrt{8} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{2\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{67}{8}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{8} & -\frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{8} & -\frac{3}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{67}{8}} \end{bmatrix}$$

d) $\begin{bmatrix} \sqrt{8} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} & \sqrt{8} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{2\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{67}{8}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ Sust. Directa. $y = \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{2}} \\ \frac{5}{2\sqrt{2}} \\ \sqrt{\frac{67}{8}} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \sqrt{8} & -\frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{8} & -\frac{3}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{67}{8}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{2}} \\ \frac{5}{2\sqrt{2}} \\ \sqrt{\frac{67}{8}} \end{bmatrix}$ Sust. Inversa $I = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Amperios

Problema 3

Un gancho para pequeñas cargas está sostenido de un resorte no lineal representado por el siguiente modelo:

$$F = K_1 x + K_2 x^2$$

Sin embargo, el fabricante no proporcionó las constantes respectivas es por ello que un estudiante de la FIM coloco cargas de prueba y midió la longitud de deformación del resorte obteniendo lo siguiente: Para una Fuerza de 120N se deformó 0.1m y para una carga de 280N se deformó 0.2m. A partir de estos resultados realice lo siguiente:

a) **(1P)** Calcule las constantes K_1 y K_2 , considerando Eliminación Gaussiana.

b) **(2.5P)** Utilizando el método de Newton-Raphson, formule la ecuación no lineal y calcule en 3 iteraciones el valor de la deformación para una carga de 500N, empiece con una deformación inicial de 0.2m.

c) **(0.5P)** ¿Cuántas cifras decimales exactas tiene la aproximación anterior?

Solución

Parte a) Se forma un sistema de ecuaciones:

120=K1*0.1+K2*0.1^2

280=K1*0.1+K2*0.2^2

De este sistema, resolviendo tenemos K1=1000 y K2=2000

Parte b) La ecuación será:

$$f(x) = 1000x + 2000x^2 - 500$$

$$f'(x) = 1000 + 4000x$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(0.2)}{f'(0.2)} = 0.3222222$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(0.32222)}{f'(0.32222)} = 0.3091693$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(0.3091693)}{f'(0.3091693)} = 0.3090170$$

Parte c)

$$er = 0.00015234 < 0.5 * 10^{-3}$$

Por lo tanto, tiene como mínimo 3 cifras decimales exactas.